

## Франц Герман

### Локально параметрическая симметрия двух функций

( [www.franz-hermann.com](http://www.franz-hermann.com) )

Представим себе такую ситуацию. Пусть один процесс описывается функцией  $f_1$ , а другой – функцией  $f_2$ . Но теоретик или экспериментатор свои звериным чутьём учёного понимает, что это один и тот же процесс (или очень похожие), только рассматривается с разных сторон.

Возникает задача, построить соответствие между функциями  $f_1$  и  $f_2$  или доказать, что такое соответствие невозможно. Конечно же, абсурдно говорить о полном совпадении двух различных функций. Речь идёт только о примерном совпадении на каком-то общем участке.

Мы можем поступить следующим образом. Разложим данные функции в похожие ряды (если это конечно возможно), введя в исходные функции свободные параметры. Пусть точность наших вычислений удовлетворяется разложением в ряд первыми 4-мя его членами. Более конкретно это можно представить следующим образом:

$$f_1(x, a, b) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3 + \dots$$

$$f_2(x, c, d) = \eta_0 + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \eta_3 x^3 + \dots$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты, получаем систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\xi_i = \eta_i, \text{ где } i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Наши свободные параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  являются неизвестными полученной системы.

Находя решения этой системы получаем соответствие между функциями  $f_1$  и  $f_2$ .

Очевидно, что не для всяких функций может быть построено такое соответствие.

Рассмотрим конкретный пример построения соответствия для функций  $e^{-x}$  и  $x^{-k}$ . Данные функции имеют схожее разложение в ряд:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(x+1)^{-k} = 1 - \frac{x}{1!} k + \frac{x^2}{2!} k(k+1) - \frac{x^3}{3!} k(k+1)(k+2) + \dots$$

Мы будем строить 4-х параметрическое соответствие (число параметров определяется числом членов в ряду разложения). Для этого представим наши функции в следующем виде:

$$y_1 = e^{-z_1}, \quad \text{где } z_1 = a(x+b),$$

И получаем такое разложение в ряд:

$$y_1 = 1 - \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} - \frac{z_1^3}{3!} + \dots \quad (1)$$

$y_2 = (z_2 + 1)^{-c}$ , где  $z_2 = (x + d)$ . Тогда, соответственно получаем такое разложение в ряд:

$$y_2 = 1 - \frac{z_2}{1!} c + \frac{z_2^2}{2!} c(c+1) - \frac{z_2^3}{3!} c(c+1)(c+2) + \dots \quad (2)$$

Заметим, что это не единственная возможность для введения параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  таким образом.

Подставим  $z_1$  и  $z_2$  в разложения (1) и (2) и приведём их к виду:

$$y_1 = \xi_0 + \xi_1 \frac{x}{1!} + \xi_2 \frac{x^2}{2!} + \xi_3 \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ для (1) и}$$

$$y_2 = \eta_0 + \eta_1 \frac{x}{1!} + \eta_2 \frac{x^2}{2!} + \eta_3 \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ для (2).}$$

Покажем коэффициенты разложений в развёрнутом виде для (1):

$$\xi_0 = 1 - ab + \frac{a^2 b^2}{2} - \frac{a^3 b^3}{6};$$

$$\xi_1 = -a + a^2 b - \frac{a^3 b^2}{2};$$

$$\xi_2 = \frac{a^2 - a^3 b}{2};$$

$$\xi_3 = -\frac{a^3}{6}.$$

Для (2) имеем:

$$\eta_0 = 1 - cd + \frac{c(c+1)d^2}{2} - \frac{c(c+1)(c+2)d^3}{6};$$

$$\eta_1 = -c + d(c+1) - \frac{c(c+1)(c+2)}{2};$$

$$\eta_2 = \frac{c(c+1) - c(c+1)(c+2)d}{2};$$

$$\eta_3 = -\frac{c(c+1)(c+2)}{6}.$$

Приравнивая  $\xi_i = \eta_i$ , получаем систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} ab\left(1 - \frac{ab}{2} + \frac{a^2b^2}{6}\right) = cd\left(1 - \frac{d(c+1)}{2} + \frac{d^2(c+1)(c+2)}{6}\right) \\ a\left(1 - ab + \frac{a^2b^2}{2}\right) = c\left(1 - d(c+1) + \frac{d^2(c+1)(c+1)}{2}\right) \\ a^2(1 - ab) = c(c+1)(1 - d(c+2)) \\ a^3 = c(c+1)(c+2) \end{cases} \quad (3)$$

Как видим, четвёртое уравнение системы (3) содержит только два неизвестных  $a$  и  $c$ . Т. о. Всю систему (3) в принципе можно свести к системе из 3-х уравнений с тремя неизвестными.

С учётом четвёртого уравнения системы (3) третье уравнение можно записать:

$$a^2(1 - ab) = c(c+1) - a^3d;$$

Кроме того четвёртое уравнение можно представить в таком виде:  $c(c+1) = \frac{a^3}{c+2}$ .

Тогда третье уравнение системы (3) принимает такой вид:

$$a^2\left(1 + ad - ab - \frac{a}{c+2}\right) = 0 \quad (4)$$

Тривиальное решение этого уравнения:  $a = 0$ .

Подставим  $a = 0$  в систему (3). Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} cd\left(1 - \frac{d(c+1)}{2} + \frac{d^2(c+1)(c+2)}{6}\right) = 0 \\ c\left(1 - d(c+1) + \frac{d^2(c+1)(c+1)}{2}\right) = 0 \\ c(c+1)(1 - d(c+2)) = 0 \\ c(c+1)(c+2) = 0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим 3 решения:  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -1$ ,  $c_3 = -2$

Очевидно, что при любом из этих решений уравнения системы превращаются в тривиальные тождества.

Т. о. решение  $a = 0$  нам не интересно. При  $a \neq 0$  и вводя параметр  $k = c + 2$ , уравнение (4) будет иметь вид:

$$k = \frac{a}{1 + ad - ab} \quad (5)$$

Рассмотрим уравнение 2 системы (3). С учётом предыдущих выкладок можем переписать его следующим образом:

$$c = a - a^2b + \frac{a^3b^2}{2} - \frac{a^3d^2}{2} + \frac{a^3d}{k}$$

или

$$k - 2 = a - a^2b + \frac{a^3b^2}{2} - \frac{a^3d^2}{2} + \frac{a^3d}{k}$$

А уравнение 1 системы (3) будет иметь вид:

$$ab - \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^3b^3}{6} = d(k - 2) - \frac{a^3d^2}{2k} + \frac{a^3d^3}{6}$$

Получаем новую систему из двух уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} ab - \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^3b^3}{6} = d(k - 2) - \frac{a^3d^2}{2k} + \frac{a^3d^3}{6} \\ k - 2 = a - a^2b + \frac{a^3b^2}{2} - \frac{a^3d^2}{2} + \frac{a^3d}{k} \end{cases}, \quad (6)$$

где  $k = \frac{a}{1 + ad - ab}$ . Т. о. одно из неизвестных можно выбрать, как свободный параметр.

Рассмотрим несколько частных случаев.

**Случай 1.** Пусть  $d = 0$ . Тогда система (6) примет такой вид:

$$\begin{cases} ab \left( 1 - \frac{ab}{2} + \frac{a^2b^2}{6} \right) = 0 \\ k - 2 = a - a^2b + \frac{a^3b^2}{2} \end{cases},$$

где  $k = \frac{a}{1 - ab}$ .

Рассмотрим уравнение 1, полученной системы.

Напомним, что  $a \neq 0$ . Тогда можем предположить, что  $b = 0$ . Но в этом случае второе уравнение последней системы приводит к противоречию. Следовательно, из первого уравнения имеем:

$$a^2b^2 - ab + 2 = 0. \quad (7)$$

Анализ уравнения (7) показывает, что оба параметра не могут одновременно находиться в области действительных значений, что тоже не годится для нашей задачи.

**Случай 2** Мы помним, что  $a \neq 0$  и  $d \neq 0$ . Рассмотрим вариант, когда  $b = 0$ . В этом случае система (6) будет иметь вид:

$$\begin{cases} d(k - 2) = \frac{a^3d^2}{2k} - \frac{a^3d^3}{6} \\ k - 2 = a + \frac{a^3d}{k} - \frac{a^3d^2}{2} \end{cases},$$

или, т. к.  $d \neq 0$  получаем:

$$\begin{cases} k - 2 = \frac{a^3d}{2k} - \frac{a^3d^2}{6} \\ k - 2 = a + \frac{a^3d}{k} - \frac{a^3d^2}{2} \end{cases}, \quad (8)$$

где  $k = \frac{a}{1+ad}$ .

Полученная система является нелинейной, но используя различные компьютерные и численные методы можно найти её решение с любой нужной точностью.

Систему (8) не сложно преобразовать в параметрическое уравнение:

$$d^2a(3-4a)+3d(2-a)-6=0 \quad (9)$$

Решая относительно  $d$ , находим явную связь между параметрами  $a$  и  $d$ .

$$d_{1,2} = \frac{-3(2-a) \pm \sqrt{9(2-a)^2 + 24a(3-4a)}}{2a(3-4a)}$$

Подкоренное выражение должно быть всегда положительно. Отсюда можно сделать граничную оценку параметра  $a$ . Самая грубая прикидка показывает,  $0,5 < a < 0,6$ .

Напомним, что параметры  $a$  и  $c$  связаны уравнением 4 системы уравнений (3)