Франц Герман

К вопросу о представлении δ-функции Дирака
(www.franz-hermann.com)

В данной заметке мы покажем представление δ-функции Дирака, которое будем назвать естественным. Существующие способы представления δ-функции Дирака носят в общем-то искусственный характер.

Определение $\delta(x)$-функции задаётся следующими равенствами:

$$\delta(x) = 0, \qquad \forall x \neq 0. \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{2}$$

Обычно представляют $\delta(x)$-функцию, как предел функциональной последовательности, образованной некоторой исходной функцией ***f(x)***.

$$f_n(x) = nf(nx), \tag{3}$$

здесь n – натуральное число.

Такую последовательность называют слабо сходящейся к $\delta(x)$-функции.

Покажем три наиболее распространённых примера представления $\delta(x)$-функции.

Пример 1. В качестве базовой функции берётся функция $\frac{Sin(x)}{x}$. Базовая функция должна быть нормирована, т. е. Приведена к выражению (2). Известно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Sin(x)}{x} dx = \pi$. Откуда получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Sin(x)}{\pi \cdot x} dx = 1.$$

Т. о. в качестве базовой функции имеем: $f(x) = \frac{Sin(x)}{\pi \cdot x}$ и по правилу (3) получаем необходимую последовательность:

$$f_n(x) = n \frac{Sin(nx)}{\pi \cdot (nx)} = \frac{Sin(nx)}{\pi \cdot x}.$$

Покажем график этой функции при $n = 50$ (Рис. 1).

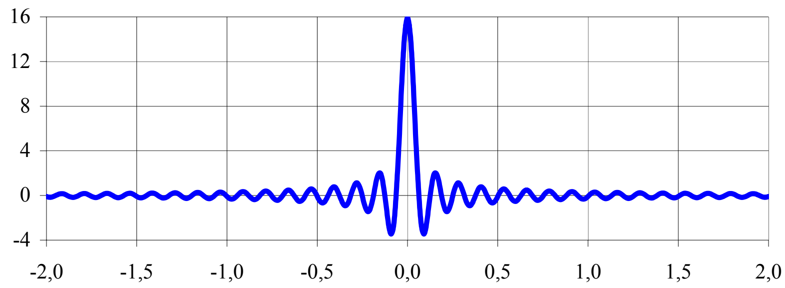

Рис. 1

На интервале (-2; +2) при $x = 0$ получаем пиковое значение функции примерно равное 16.

Пример 2. В данном случае используется функция Гаусса закона нормального распределения: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-x^2\right)$. Данная функция уже нормирована, поэтому получаем такую функциональную последовательность:

$$f_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-(nx)^2\right).$$

Покажем график этой функции при $n = 50$ (Рис. 2).

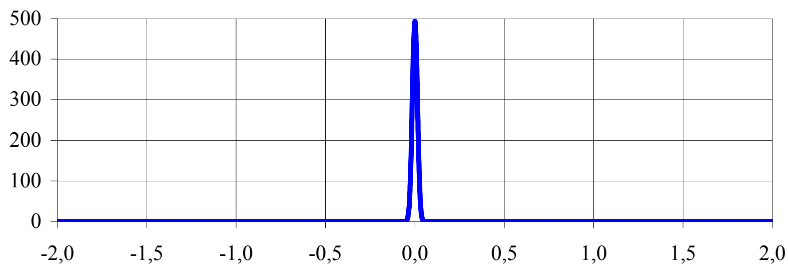

Рис. 2

Как видим, представление функцией Гаусса быстрее сходится к $\delta(x)$-функции. При $x = 0$ получаем пиковое значение функции примерно равное 500.

Пример 3. В данном случае за базовую функцию взята функция Лоренца, которая после нормирования принимает вид: $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\left(x^2+1\right)}$. Переходя к функциональной последовательности, получаем: $f_n = \frac{1}{\pi}\frac{n}{\left((nx)^2+1\right)}$.

График этой функции показан на Рис. 3

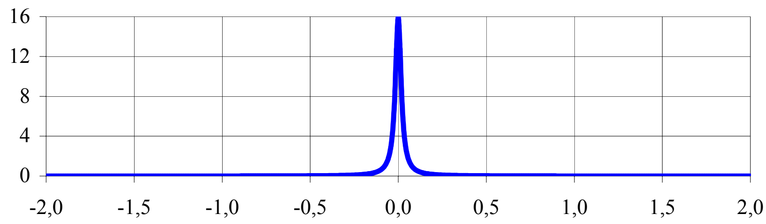

Рис. 3

Представления 1 - 3 будем называть искусственными, так как исходные функции искусствено превращаются в функциональные последовательности по правилу (3).

Рассмотрим пример естественного представления $\delta(x)$-функции.

На Рис. 4 показана кривая, которая называется версьера (Локон Аньези). Уравнение этой кривой имеет вид:

$$y = \frac{d^3}{x^2 + d^2}\,, \tag{4}$$

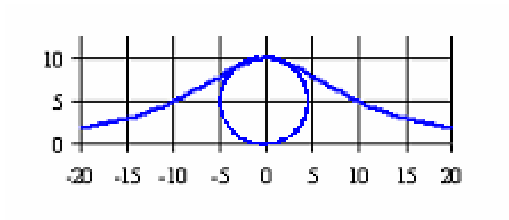

Рис. 4

где d – даметр образующей окружности.

Вместо образующей окружности возьмём эллипс (Рис.5) с полуосями b, a; уравнение которого имеет вид:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1\,. \tag{5}$$

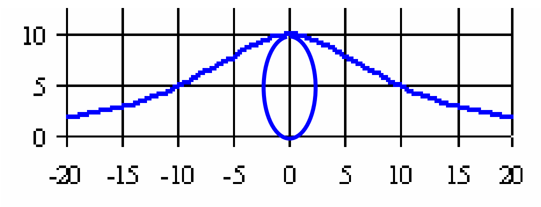

Рис. 5

Очевидно, что при $b \to 0$, и $a \to \infty$ новая кривая будет давать представление $\delta(x)$-функции, конечно же при соблюдении условия нормирования (2).

Построим обобщённое уравнение версьеры. Покажем, как строится текущая точка искомой кривой.

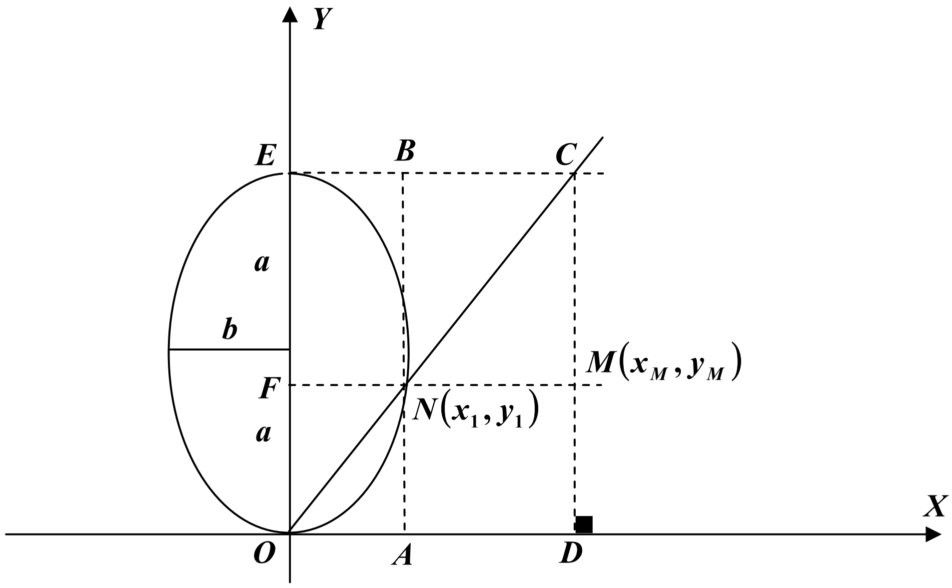

Рис. 6

Пусть точка $\boldsymbol{N}$ принадлежит нашему эллипсу. Прямая ***EB:*** $\boldsymbol{y = 2a}$, тогда $\boldsymbol{C \equiv ON \cap EB}$. Проведём прямую $\boldsymbol{CD \perp OX}$. Прямая ***FN:*** $\boldsymbol{y = y_1}$, тогда $\boldsymbol{FN \cap CD \equiv M}$ - текущая точка искомой прямой.

Из построения имеем такое соотношение:

$$\frac{x_M}{2a} = \frac{x_1}{y_1}. \tag{6}$$

Откуда можем записать:

$$x_1 = \frac{x_M y_M}{2a}, \tag{7}$$

т. к., в силу построений,

$$y_1 = y_M. \tag{8}$$

Точка $\boldsymbol{N}$ является текущей точкой эллипса. Подставляя в уравнение (5) выражения (7) и (8), получаем обобщённое уравнение версьеры (для общности введём обозначения: $\boldsymbol{x_M = x}$, $\boldsymbol{y_M = y}$).

$$y = \frac{8b^2 a}{x^2 + 4b^2} \tag{9}$$

При $\boldsymbol{b = a}$ и $\boldsymbol{2a = d}$ получаем классическое уравнение версьеры (4).

Найдём условие нормирования интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)dx = 1 \tag{10}$$

Здесь подынтегральной функцией является функция (9). Известно, что

$$\int \frac{8ab^2}{x^2+4ab}dx = 4ab\left(arctg\frac{x}{2b}\right),\ b \neq 0\,. \tag{11}$$

В развёрнутом виде интеграл (10) имеет выражение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\left(\int y(x)dx\right) - \lim_{x\to-\infty}\left(\int y(x)dx\right) = 1 \tag{12}$$

Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(arctg\frac{x}{2b}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(arctg\frac{x}{2b}\right) = -\frac{\pi}{2}$. Подставляя значения пределов в выражение (11), а затем в выражение (12), получаем условие нормирования.

$$4ab\cdot\pi = 1 \text{ или } a = \frac{1}{4\pi\cdot b} \tag{13}$$

Подставляя условия (13) в уравнение (9) и вводя обозначение $2b = B$ - ось эллипса по оси OX, получаем обобщённое уравнение версьеры, нормированное под $\delta(x)$-функцию Дирака.

$$y = \frac{B}{\pi\cdot\left(x^2+B^2\right)} \tag{14}$$

Введём ещё одно обозначение: $B = \frac{1}{n}$. Тогда уравнение (14) можно преписать в виде:

$$y = \frac{n}{\pi\cdot\left((xn)^2+1\right)} \tag{15}$$

Не трудно заметить, что уравнение (15) ни что иное, как функциональная последовательность Лоренца представления $\delta(x)$-функции Дирака.

Мы назвали такое представление естественным, т. к. величина n в данном случае - не абстрактный параметр, а имеет вполне определённый геометрический смысл – величина обратная значению длины малой оси эллипса.

Литература

1. П. А. М. Дирак, «Принципы квантовой механики», М., «НАУКА», 1979

2. А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович, «Краткий курс математического анализа», М. «НАУКА», 1971

3. Я. Б. Зельдович, И. М. Яглом, «высшая математика для начинающих физиков и техников», М., «НАУКА», 1982

4. В. С. Владимиров, «Уравнения математической физики», М., «НАУКА», 1967

5. Э. Маделунг, «Математический аппарат физики», М., «НАУКА», 1968

6. Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев, «Справочник по физике», М., «ОНИКС», 2006

7. «Физическая энциклопедия», Т. 1, М., «Советская энциклопедия», 1988

8. «Золотой фонд. Энциклопедия. Математика», М., «Большая Российская энциклопедия», 2003